Динамика денежного обращения.

А.В.Прокофьев
Днепропетровский планетарий, Днепропетровск

Тезисы. Построена реалистичная глобальная модель изменения частоты встречаемости монет со временем для любого места наблюдения. На примере московской двухлетней большой статистики 20 копеек 1989 года показана её согласованность с наблюдениями, получены основные динамические характеристики и средняя встречаемость по стране. Обсуждены основные результаты и программа дальнейших исследований.

Abstracts. A realistic global model of changing of frequency of coins occurrence with time for any observation place is constructed. On an example of 2 year massive statistics in Moscow of 20 kopecks 1989 the consistency of the model with observations is shown. The essential dynamical characteristics and average occurrence in the country are received. The main results and the program of further investigation are discussed.

Постановка вопроса.
Одно из направлений исследования монет – ведение их статистики в настоящем денежном обращении или при изучении кладов. Как правило, специалиста интересует степень встречаемости вариантов монет. Нередко эта работа является основной для определения их степени редкости. Часто итогом тщательного учёта становится значение: вариант 1 обычно встречается 1: 500 монет этого номинала, а вариант 2 – 1: 30. При всём том, что эти оценки являются важными, необходимо сделать определённые замечания, с учётом которых полученные числа становятся значимыми.

Собственно эта работа призвана указать на глубинные явления, которые значительно влияют на получаемые выводы. Для этого и была построена динамическая модель денежного обращения. Модель оказалась мощным инструментом в руках исследователя, она способна показать не только динамику обращения в определённом месте, не только по данным наблюдений в одном месте, предсказать характер обращения в другом, но и выявить глобальные характеристики обращения. В применении к поставленной выше задачи, в частности, оказалось, что даже в одном и том же месте наблюдений встречаемость вариантов монет со временем значительно изменяется.

Денежная эмиссия.
В каждый момент времени в денежном обращении находятся монеты различных размеров, форм, номиналов и их оформлений. Вся их одновременная совокупность, называется эмиссией. В обращении могут находиться монеты предыдущих эмиссий, как, например, в СССР после реформы 1961 г. в обращении оставались монеты младших номиналов 1926-1957 гг. Понятно, что если мы задаёмся вопросом встречаемости 3 копеек 1957 года в обращении 1980-х, то мы будем интересоваться тем, как часто такая монета встречается среди 3-копеечников, а не среди всех монет вообще.

Постановка задачи.
Монетную массу, постоянно находящуюся в движении денежного обращения, можно представить как по школьной задаче о бассейне с двумя трубами. Как правило, каждый год вводятся в обращение новые и новые монеты, обычно отчеканенные в том же году. И в то же время из обращения выводятся монеты в результате порчи и износа (отделения сберкасс и Госбанка изымали такие экземпляры), в результате естественных потерь и проч. При этом, как и вода в бассейне, монеты перемешиваются.

Нас будут интересовать динамика встречаемости новых монет в течение времени. На практике это может быть сделано таким образом. В некотором месте наблюдатель фиксирует, что в определённый момент времени в выборке из n монет ему встретились n_1 монет определённого нового варианта.

Он накапливает эти результаты и получает динамику изменения частоты встречаемости варианта со временем.

В этой работе вместо того, чтобы объяснять результаты замера конкретного наблюдателя, мы построим глобальную модель динамики денежного обращения. Тогда мы сможем применить её к статистическим данным, собранным этим наблюдателем или любым иным, находящимся в любом другом месте и проводящим подобную серию наблюдений, и проверить, насколько полученная модель соответствует действительности. Для проверки глобальной модели выбрана достаточно мощная статистика 20-копеечных монет 1989 г.

Динамическая модель.

Государственный банк СССР вводил в обращение монеты, находившиеся в Гохране. Монеты последнего года выпуска, которых раньше в обращении не было, гарантированно новые, и поэтому их можно рассматривать как индикаторы поступлений. Динамика обращения одинакова для всех монет, но проследить это легко на основе «меченых» монет, где новая дата выпуска и является необходимой нам меткой. После того, как монета оказалась в денежном обращении, она участвует в основном процессе – перекочёвывания из рук в руки. Этот процесс аналогичен тому, который в физике называется диффузией, когда частицы в результате случайного теплового сталкивания перемещаются, и в целом концентрация этих частиц выравнивается по всему объёму. Процесс этого перемещения на микроскопическом уровне описывается уравнением Эйнштейна, а на макроскопическом уровне – уравнениями диффузии. Их открыл немецкий физиолог Адольф Фик в 1855 г. Теория диффузии изложена в стандартном курсе по физике. Из специально посвящённых различным аспектам диффузии см., например, элегантную по изложению работу [1]. В этой работе в дальнейшем используется минимальный математический аппарат, все громоздкие выкладки по возможности упущены, но все необходимые для понимания данные приведены.

Итак, пусть нас интересует концентрация частиц $C(\mathbf{x},t)$ в каждой точке $\mathbf{x}$ и в каждый момент времени t. Вообще говоря, под точкой $\mathbf{x}$ понимается точка (x,y,z) в трёхмерном пространстве. Второй закон Фика даёт связь между изменениями концентрации во времени и в пространстве в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right),$$

где D – коэффициент диффузии. Задача является полностью определённой, когда заданы начальные и граничные условия.

Нас будет интересовать вариант макроскопической самопроизвольной диффузии. Поэтому займёмся построением модели поступления новых монет в обращение и её обоснованием.

Первая хорошая новость состоит в том, что денежное обращение осуществляется (по крайней мере, пока) на поверхности Земли, и поэтому задача вместо трёхмерной становится двумерной. Места, которые осуществляют эмиссию монет, это банки, сберкассы, крупные магазины, кассы выдачи зарплат, отделения почты, вокзалы и др. Они точечные и расположены по всей стране. Будем считать, что новые монеты перемешиваются с уже находящимися в обращении за счёт диффузионных процессов. Границами обращения положим не только физическую государственную границу СССР, но и предельные населённые пункты, находящиеся в глубинках страны. Преобразуем полученную сложную геометрию фрактального типа к прямоугольному виду. Пусть все источники новых монет расположены равномерно вдоль одной стороны прямоугольника и пусть противоположная сторона будет границей обращения. В этом случае наша задача выглядит таким образом.

В начальный момент времени t_0 все источники эмитировали новые монеты. С течением времени концентрация монет в источниках будет уменьшаться, а на границе обращения будет увеличиваться, наступит момент, когда перемешивание приведёт к одинаковой концентрации по всему прямоугольнику. Наш наблюдатель находится где-то внутри прямоугольника и в какой-то момент времени делает пробную выборку монет. Он определяет, какую часть выборки составляют новые монеты, фиксируя, таким образом, их концентрацию и момент времени. Полученная им зависимость концентрации от времени может быть сравнена с предсказанной теоретически. Переведём это на математический язык.

Положим расстояние между сторонами с источниками и границей обращения равным 1. Нам всё равно, какое значение принять, поскольку после нашей трансформации, расстояние между источниками и границей стало одинаковым. Пусть ось 0*x* будет проходить от стороны с источниками к границе обращения. Из симметричности построения мы видим, что диффузионный поток движется от одной стороны прямоугольника к другой, и концентрация будет зависеть лишь от времени и координаты *x*. Иначе говоря, $C(\mathbf{x},t)$ становится $C(x,t)$. При этом $x=0$ – это линия источников, а $x=1$ – граница обращения. Остановимся на введённом параметре *x* подробнее. Понятно, что длина по оси 0*x* не характеризует реального расстояния в километрах. Она становится качественным параметром, указывающим, как далеко наблюдатель находится от линии источников или от границы наблюдения. Если у нас будет достаточное количество наблюдателей по всей стране, то по результатам их замеров мы сможем определить с необходимой точностью значение *x* для каждого из них, и таким образом составить этот самый переход от реальной страны СССР к нашему трансформированному прямоугольнику.

Вернёмся к нашей модели. Начнём отсчёт времени с момента t_0. Тогда в самом начале все новые монеты были сконцентрированы на линии $x=0$, а в остальной части прямоугольника их нет, т.е. $C(x,0)=0$, если $x\neq0$. Здесь и дальше в рассуждениях мы будем полагать, что естественная утечка монет – потери, оседание в копилках и коллекциях, перемещения за границу обращения, является незначительной и ею можно пренебречь. Во всяком случае, это предположение оправдано для 20 копеечных монет 1989 г., поступивших в обращение в огромных количествах, и доля их потерь в рассматриваемый двухлетний период мизерна. Таким образом, мы сформулировали граничные условия – невозможность исчезновения монет за пределы прямоугольника. На математическом языке эти граничные условия означают, что у нас абсолютно упругие стенки. Понятно, что концентрация новых монет в разных местах наблюдения постепенно выравнивается, а значит, можно говорить о скорости изменения концентрации от точки к точке. Граничные условия абсолютно упругих стенок означают, что скорость переноса монет на границах прямоугольника равна нулю, т.е.

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\x=1}} = 0\,.$$

Отсюда мы уже можем сделать простой, но важный вывод. После прошествия большого промежутка времени, концентрация новых монет выравнивается по всему прямоугольнику и становится равной $C(x,\infty)=C_0$.

У нас уже имеются закон изменения концентрации, начальные и граничные условия. Задача полностью и корректно поставлена. Теперь всё можно отдавать математикам и получить ответ, т.е. явный вид нашей функции изменения концентрации по всему прямоугольнику со временем $C(x,t)$.

Но всё-таки эта модель не описывает ситуации, с которой встречается нумизмат. В построенной модели произошло одномоментное впрыскивание новых монет и далее наблюдалось, как они рассеиваются. На самом деле процесс введения новых монет длительный и занимает месяцы. В рассматриваемом ниже примере первые 20-копеечные монеты 1989 года были зафиксированы 21 марта, а первые монеты следующего года – 11 марта 1990 г. [5]. Понятно, что в течение месяцев, пока не начали выпуск монет 1990 года, источники в $x=0$ не бездействовали. Будем считать, что они выпускали в обращение новые, только что отчеканенные монеты. Эти наблюдения позволяют предложить иную приближенную к реальности картину. Пусть в момент времени t=0 на линии x=0 началась эмиссия новых монет. Она продолжалась до момента времени T_0, после чего прекратилась. У нас появился действующий источник, поэтому изменились и сами уравнения. Теперь рассматриваемое уравнение Фика преобразовалось в уравнение с учётом источника F(**x**,t). Применительно к нашему прямоугольнику, имеем

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + F(x,t).$$

Поскольку эмиссия происходит только там, где x=0, то F(x,t)=F(t) на линии источников x=0, и F(x,t)=0 во всех остальных точках $x\neq 0$. Вид F(t), вообще говоря, не известен. Тогда поступим так, как обычно делают в физике и других науках - предложим самый простой вариант: линейную зависимость. Функция F(t) равномерно возрастает до какого-то момента времени T_1,

$$F(t)=at, \qquad 0\le t\le T_1,$$

и потом так же равномерно уменьшается до 0 в уже введённый момент времени T_0. Основанием для такого вида F(t) может стать и следующее рассуждение. В математике аналитическое решение уравнений диффузии получено точно для очень ограниченного числа задач. Поэтому в типичной задаче почти всегда решение находится численно, а не в виде достаточно простых функций. Для расчёта численными методами функцию F(t) представили бы в виде бесконечного ряда простых функций времени t, в котором, начиная с некоторого члена, каждое последующее слагаемое вносит незначительный вклад в итог. И в этом представлении первое слагаемое линейное по t, а все последующие – более сложные функции t. Таким образом, предложенный линейный вид – это первый член бесконечного ряда, иначе говоря, первое приближение. Во время обсуждения результатов мы вновь вернёмся к обоснованию выбранной функции.

Итак, переда нами задача. Найти концентрацию C(x,t), решая уравнение Фика с источниками, в прямоугольнике с абсолютно упругими стенками с нулевыми начальными условиями. Функция источников нулевая везде, кроме линии эмиссии x=0, на которой

$$F(t)=\begin{cases} at, & t<T_1,\\ a\dfrac{T_1}{T_0-T_1}(T_0-t), & T_1\le t\le T_0,\\ 0, & t>T_0.\end{cases}$$

Эта задача имеет решение, выражаемое в виде простых функций. В явном виде концентрация C(x,t) выглядит так:

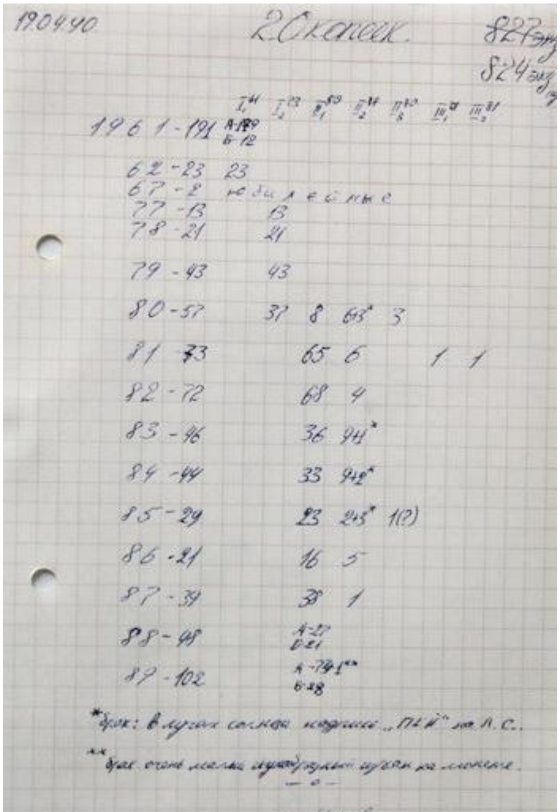
$$C(x,t)=\begin{cases} 0, & t<0,\\ \dfrac{1}{2}at^2+2a\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(m\pi x)}{(m^2\pi^2 D)^2}(m^2\pi^2 Dt-1+e^{-m^2\pi^2 Dt}), & 0\le t\le T_1,\\ \dfrac{1}{2}a\dfrac{T_1}{T_0-T_1}(t(T_0-t)+T_0(t-T_1))+ \\ \quad +2a\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(m\pi x)}{(m^2\pi^2 D)^2}\left(\frac{T_1}{T_0-T_1}(m^2\pi^2 D(T_0-t)+1)+(1-\frac{T_0}{T_0-T_1}e^{m^2\pi^2 DT_1})e^{-m^2\pi^2 Dt}\right), & T_1\le t\le T_0,\\ \dfrac{1}{2}aT_1T_0+2a\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(m\pi x)}{(m^2\pi^2 D)^2}\left(1-\frac{T_0}{T_0-T_1}e^{m^2\pi^2 DT_1}+\frac{T_1}{T_0-T_1}e^{m^2\pi^2 DT_0}\right)e^{-m^2\pi^2 Dt}, & t\ge T_0.\end{cases}$$

Мы видим, что по истечении большого количества времени, в последней строчке для концентрации, экспонента стремительно приближается к нулю и действительно C(x,∞)=C_0=$\frac{1}{2}aT_1T_0$. Для нашей функции источника $\frac{1}{2}aT_1T_0$ представляет собой площадь треугольника, т.е. полное количество монет, выпущенных всеми источниками за всё время, в пересчёте на всё обращение. Этот результат и следовало ожидать: все новые монеты равномерно распределятся, при этом потери отсутствуют, что задавалось с помощью граничных условий. В общем случае

$$C_0 = \int\limits_{t=-\infty}^{t=+\infty} \int\limits_{x=0}^{x=1} F(x,t)\,dx\,dt.$$

Данные наблюдений.

В качестве примера выбраны 20- копеечные монеты, поскольку автор располагает статистикой их встречаемости в Москве, которая подробно велась с осени 1988 года до декабря 1990 г и включает в себя более 30 тысяч экземпляров [5]. В этот период монеты 1989 года вводились в денежное обращение и в статистике отражено, когда они только появились и как изменялось их количество не только к концу года, а и на протяжении следующего 1990 года. Кроме того, ещё одним фактором для выбора именно этих монет является то, что монеты этого года бедны на варианты. В настоящее время в каталогах продукция ЛМД и ММД объединена, поскольку различия в штемпелях этих монетных дворов едва уловимы на экземплярах хорошей сохранности, и эти различия практически исчезают на достаточно походивших. За указанный период был обнаружен только лишь один экземпляр с небольшим лунообразным изъяном 20-копеечника 1989 г., что, по сути, является браком (находка 19 апреля 1990 г., см. рисунок ниже). Статистика по степени износа монет не велась, что вполне естественно, т.к. степень притёртостей новых монет незначительна, более того в обсуждаемой в этой статье статистике с точностью до года надёжно были определены все экземпляры. Таким образом, в обращении находится лишь один вариант 20 копеек 1989 г., что значительно упрощает исследование и позволяет делать обобщения на встречаемость вариантов монет в каждом конкретном случае.



Итак, в Москве велась статистика 20-копеечных монет в течение двух лет. В каждой выборке монеты описывались по вариантам и возвращались в обращение. В поставленной здесь задаче нас интересует только участие монет 1989 года среди всех остальных монет ранних лет. Поэтому итог наблюдений с начала 1989 года до конца наблюдений 4 декабря 1990 г. сведён в таблицу Приложения 1, где отмечены количества 20-копеечных монет до 1989 года включительно, а так же отдельно только 20 копеек 1989 г. Покажем это на примере. Мы преобразовали, таким образом, рисунок слева в строчку п.137. В результате такого преобразования все категории монет были сведены в две: в одну категорию были объединены три варианта монет 1989 года, а в другую – все остальные монеты ранних лет. Когда в обращении стали встречаться монеты 1990 года, они исключались из этой статистики. Хотя интуитивно кажется, что это можно сделать, всё же при этом объединении была потеряна информация. В математике есть результат, что такое объединение для поставленной нами задачи корректно. Детальное перераспределение информации рассмотрено в [3, гл.6, разд. 4.2].

Наблюдения были организованы так, что указанная дата соответствовала фактической дате получения выборки, что существенно для решаемой здесь задачи. Даже когда в один и тот же день было сделано две выборки, они фиксировались отдельно, см. например, п.89 и п.90 таблицы. Казалось бы, можно было бы объединить их, по крайней мере, для проводимой здесь обработки. Но из теории информации известно, что информация от выборок больше, чем информация от их объединения [3, гл.2, разд.2 и 3]. По этой причине объединение не проводилось ни для выборок одного дня, ни тем более для выборок с небольшим количеством монет за несколько соседних дней. Основным источником монет были киоски недалеко от метро «Университет», хотя были и другие места в городе. Какие конкретно источники использовались в каждой выборке, в наблюдениях не фиксировалось. Этот факт сказался на гипотезах, высказанных в обсуждении результатов. Все зафиксированные 165 выборок удовлетворительны для обработки.

Результаты обработки.

В предложенной модели имеется 6 неизвестных: P={a, D, t_0, T_1, T_0, x}. Эти неизвестные должны удовлетворить 165 выборкам наблюдений. У нас избыточная система уравнений. Поэтому решение ищется методом наименьших квадратов, когда выбираются оптимальные значения указанных неизвестных. Этот метод хорошо описан в учебной литературе, детали можно посмотреть, например, в [2, гл.8]. Для понимания метода студентам предлагается простая зависимость между наблюдениями и неизвестными, но метод работает и в случае нелинейных функций. В случае зависимости общего виде он полностью аналогичен параметрической задаче, разобранной в [3, гл. 6, разд. 4.3]. Приведём суть метода наименьших квадратов. Мы не ожидаем, что найдём такие значения 6 неизвестных, что для всех 165 выборок вычисленная концентрация C(x,t) совпадёт с $\frac{n_1}{n}$.

Но тогда мы можем посчитать неувязку – расхождение между вычисленным и наблюдённым значениями. Теперь зададимся таким вопросом. Нас интересуют такой набор неизвестных параметров P, чтобы квадрат неувязок был минимальным, т.е.

$$\min_P \sum_{\substack{все \\ выборки}} \left(\frac{n_1}{n} - C(x,t)\right)^2 .$$

Несложные расчёты дают следующие оценки параметров диффузии:

a=0.0000003674 сут$^{-2}$,
D=0.00002953 сут$^{-1}$,
t_0= 9 марта 1989 г.,
T_1=269.4 суток,
T_0=367.7 суток,
для места наблюдений:
x=0.05775.

Ошибки полученных результатов.

В приложении 2 показано распределение точек наблюдения и график C(x,t) на линии x=0.0578. Под точками наблюдений принято отношение монет 1989 г. n_1 ко всем монетам до этого года включительно n в каждой выборке наблюдений.

Нас будет интересовать ещё один вопрос – надёжность полученного значения концентрации. Он состоит из двух частей. Это ошибки измерений и проверка гипотезы. Рассмотрим здесь ошибки измерений. Проблема в том, что как бы мы ни старались, но в наблюдениях не происходят точные совпадения расчётной концентрации C(x,t) и точки наблюдений. А это значит, что есть определённые ожидаемые отклонения между ними. Эти отклонения характеризуются дисперсией. Например, для п. 84 28 ноября 1989 г. в выборке из n=150 монет встретилось n_1=11 20-копеечников 1989 г. Вычисленное значение концентрации C(0.0578, 28 ноября 1989)=C=0.099.
Если ожидать, что выборка в n монет имеет вероятность C для монет 1989 года и представляет собой нормальное распределение, то дисперсия $\sigma = \sqrt{nC}$. Нормальное распределение, в частности, означает, что наблюдённое значение n_1 попадёт в интервал [nC+σ, nC-σ] с вероятностью 68%. В

примере для п.84 действительно $\frac{n_1}{n}$=0.073$\in$ [0.126,0.73]. На графике в виде вертикальных линий при каждой точке наблюдений показаны именно эти ожидаемые отклонения. С ними нет необходимости бороться за уменьшение, они – естественный исход полученных значений. Конечно, возникает вопрос, как же увеличить точность, получаемую из наблюдений, когда мы вольны сами сконструировать это наблюдение, а не обрабатывать уже проведённое. В каждом конкретном случае нас интересует число С, и хотя с увеличением количества монет в выборке n, ширина интервала 2σ растёт, его относительное значение $\frac{2\sigma}{\mathrm{n}} = 2\sqrt{\frac{C}{n}}$ с увеличением n уменьшается. Например, выборка в 1000 монет по сравнению с выборкой из 100 монет увеличивает точность в три раза. Следующее трёхкратное увеличение точности требует выборки в 10000 монет. Просмотр такого количества может быть осуществлён с большими затратами человеко-часов или с привлечением автоматов по распознаванию образов. И всё для того, чтобы достигнуть точности измерения всего в 1%!

Как видно из приложения 2 график С(x,t) прекрасно описывает весь массив данных кроме участка 21марта – 11 мая 1989 г., когда монеты только начали поступать в незначительных количествах. Дисперсия при этом весьма незначительна, т.к. в неё входит ожидаемое значение С(x,t), которое в самом начале чрезвычайно мало. В остальных случаях видно, что, как правило, далеко от кривой находятся точки наблюдения из небольших выборок n. Чем меньше n, тем больше неопределённость и ожидаемый разброс.

Проверка гипотезы.
Всё, что есть в руках наблюдателя – это результаты вероятностных событий. И может случиться так, что произойдёт что-то маловероятное. Любой результат, вообще говоря, возможен. Модель, которую мы построили, может оказаться из-за совершенно случайного стечения обстоятельств верной именно для этих измерений, но неверной в действительности. Поэтому, когда создана модель, есть смысл проверить её надёжность. По сути, модель – это гипотеза. В нашем случае гипотеза H_1 о том, что на линии x концентрация новых монет в момент времени t имеет величину С(x,t). Но в этот момент и в этом месте у нас есть результат наблюдений: в выборке из n монет новых оказалось n_1. В математике гипотезы принимают или отвергают только, когда есть выбор. Пока нет альтернативы – любое предположение хорошо. Нам нужна ещё одна гипотеза, чтобы иметь возможность их сравнивать. Результатом станет принятие одной гипотезы и отвержение другой. Вторую гипотезу H_2 для точки измерения сконструировать просто. По результатам измерения мы можем выдвинуть гипотезу: концентрация в точке измерения равна не С(x,t), а $\frac{n_1}{n}$. Это значение называется наилучшей несмещённой оценкой. Теория сравнения гипотез разработана хорошо и изложена в любом стандартном курсе теории вероятности, см. например [2, гл.XI], или более обстоятельно [3, гл.5.3, особенно пример 3.2]. Вначале определяем степень доверия α. Это число задаёт критерий сравнения. По нему получают доверительную границу d различения гипотез. Если функция различения этих гипотез на наблюдённых величинах не превышает границу d, то гипотезе H_1 можно доверять с вероятностью 1-α. В нашем случае в качестве функции различения выберем χ^2-распределение. Таким образом, имеем

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - nC(x,t))^2}{nC(x,t)(1-C(x,t))} \le d(\alpha),$$

Зададим α=0.1%. Тогда d=10.8 (табличное значение χ^2-распределения). Сравнение для всех 165 точек наблюдения показывает, что гипотеза H_1 хороша везде, кроме 14 точек участка 21 марта – 11 мая 1989 года, когда новые монеты только начали поступать в обращение. Это видно и в Приложении 2, где указанные точки наблюдения заметно выше графика концентрации С(0.0578,t). В обсуждении этому участку будет уделено особое внимание.

Обратим внимание на ещё одну особенность этого подхода. Он более мощный, чем проверка полученного результата с помощью ошибок, изложенных в предыдущем разделе. В самом деле, здесь не сделано ни одного предположения о природе случайности обнаружения n_1 новых монет в выборке из n. Как мы помним, чтобы построить дисперсионный интервал σ, нам было необходимо делать предположения о независимости и нормальном распределении выборок. Нормальное распределение, вообще говоря, некорректно в нашей задаче, т.к. оно позволяет числу n_1 приобретать отрицательные значения с ненулевой вероятностью. Независимость последовательных выборок тоже требует обоснования. Из раздела «Данные наблюдений» известно, что монеты после просмотра вновь возвращались в обращение. А это означает, что есть вероятность в более поздней выборке вновь встретить те же экземпляры, но не как результат равномерного перемешивания, а из-за того, что просмотренные монеты не совсем случайно вновь оказались в выборке. На математическом языке это означает, что может иметься корреляция между выборками, и их независимость необходимо проверять. Предложенный метод χ^2-распределения позволяет избежать этих дополнительных вопросов. Он эффективен уже тогда, когда выборка n состоит из нескольких десятков. Если что-то не так, если имеется систематическая ошибка, то модель не пройдёт тест χ^2-распределения. То, что гипотеза H_1 в целом успешно прошла его проверку, придаёт уверенность в надёжности полученного результата.

Обсуждение.

Применение модели $C(x,t)$ в частном случае показало, что она прекрасно описывает динамику поступления в обращение новых монет. На основе наблюдений можно утверждать, что картина поступления новых монет выглядела так или примерно так. Дата фактического выпуска новых 20-копеечников – четверг 9 марта 1989 года находится незадолго до первых обнаруженных монет 21 марта, что обусловлено близостью места наблюдения к линии эмиссии. Максимума эмиссия достигла в воскресение 3 декабря 1989 года. Монеты перестали выпускать через год после начала эмиссии в понедельник 12 марта 1990 г. Как мы уже знаем, первые монеты следующего года были выявлены 11 марта 1990 года, что даёт дополнительную косвенную согласованность.

Благодаря близкому расположению места наблюдений x=0.0578 к линии эмиссии, удалось пронаблюдать эффект, известный в физике как диффузионный удар – увеличение концентрации выше среднего и затем его постепенное затухание до среднего значения. Его никогда не наблюдается для x>0.5. Но именно благодаря такому близкому расположению места сбора к линии эмиссии, в самом начале выпуска с марта до 11 мая 1989 г., когда каждый экземпляр новой монеты существенно влияет на статистические выводы, появилось расхождение между наблюдениями и моделью (см. разделы «Ошибки полученных результатов» и «Проверка гипотезы»). Можно сделать предположение, что в этот период был ещё один источник новых монет недалеко от места сбора. Поскольку точное место сбора не фиксировалось, то можно предположить, что либо недалеко от ст. «Университет» был дополнительный источник новых монет (например, кассы метро, касса выдачи зарплаты соседнего предприятия), либо сбор монет осуществлялся в это время в ином месте, более близком к линии эмиссии. Во всяком случае, в рамках этой модели можно ввести в уравнение Фика с источниками ещё одну непродолжительную линию источников $F_{доп}(x_{доп},t)$ так, чтобы она объяснила этот подъём вначале эмиссии. При этом, очевидно, что она не окажет значительного изменения в общей картине, поскольку с её помощью будут объяснены первые 50 новых монет на фоне 2700, включённых в статистику. В Приложении 3 показан результат обработки этой модели. В нём приведены параметры, проверка гипотезы и график концентрации для дополнительного источника. Место сбора, как и ожидалось, находится почти на линии источников.

В целом рассмотренный пример показал, что хотя в физике диффузия и быстротечна, исследователю денежного обращения необходимо учитывать его динамику. За счёт длительной эмиссии динамика процесса занимает годы прежде, чем приходит в равновесие. Как уже указывалось, чтобы иметь точность замера нередких монет в 1% необходимо делать выборки по 10000 монет. У большинства исследователей типичная выборка – сотни монет, а, следовательно, точность измерения порядка десятка процентов. Именно поэтому нет необходимости гоняться за излишней точностью обработки результатов. В данном случае куда важнее динамика, т.е. даже не огромные выборки, сделанные достаточно часто, дают большой вклад в итоговую картину. Важным фактором является и отсутствие длительного накопления монет, прежде чем они будут описаны. В период роста концентрация меняется буквально за доли недели, и здесь важна точечная выборка, а не суммарная статистика за несколько дней. Вообще, следует помнить и о том, что информация от двух выборок всегда больше, чем информация от их суммы. В данном случае за счёт разнесения во времени мы получили картину изменения частоты встречаемости новых монет и определили конечную концентрацию C_0 на уровне 2%, в тоже время, если просуммировать статистики за весь двухлетний период, то средняя концентрация составит 9%, а это далеко от истины.

Из теоретических соображений есть смысл рассмотреть подробнее асимптотическое поведение концентрации при больших временах в окрестности линии эмиссии, где наблюдается диффузионный удар и на границе обращения, т.е. *x* либо мало́, либо близко к 1. Монеты СССР практически исчезли из обращения уже к 1993 году, так что это рассмотрение носит уже умозрительный характер. Когда время стремится к бесконечности, в выражении для концентрации

$$C(x,t)=\frac{1}{2}aT_1T_0+2a\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(m\pi x)}{(m^2\pi^2D)^2}\left(1-\frac{T_0}{T_0-T_1}e^{m^2\pi^2DT_1}+\frac{T_1}{T_0-T_1}e^{m^2\pi^2DT_0}\right)e^{-m^2\pi^2Dt},$$

начинает играть роль только первый член ряда. В этом случае

$$C(x,t)\sim C_0+C_1(x)e^{-\pi^2Dt},$$

где $C_1(x)$ – некая функция *x*, не очень существенно от него зависящая. Мы можем рассматривать её как константу и обозначим в дальнейшем C_1. При этом C_1 положительна для малых *x*, и отрицательна для *x* порядка 1. Знак ~ означает «ведёт себя как».

Введём новую константу размерности времени $T=\frac{\ln 2}{\pi^2 D}$, которую мы назовём характеристическим временем. Тогда

$$C(x,t)\sim C_0+C_1 2^{-t/T}.$$

Таким образом, мы получили закон полураспада. Здесь T – период полураспада. Т.е. за время T концентрация приближается к асимптотическому значению, причём превышение для малых *x* или недостача для *x* около 1 уменьшается в два раза. Для нашей модели T=2178 суток≈6 лет. Это довольно неожиданный результат. Получается, что достижение предельного значения концентрации с точностью до 10% (как мы помним, это типичная точность, получаемая в выборке) на месте наблюдения произошло бы в 2015 году. На границе обращения динамика концентрации ведёт себя подобным образом. Она представляет собой монотонно возрастающую функцию, которая в нашем случае к 4 декабря 1990 г.(последняя точка наблюдений) достигает $3\cdot10^{-8}$, но уже через T, примерно 6 лет после начала эмиссии составила бы 0.0016, т.е. около 10% предельного значения C_0, через 2T концентрация достигнет 55%, через 3T – 70% и к тому же 2015 году будет мало отличаться от C_0. Итак, через характеристическое время T концентрация в прямоугольнике всё ещё сильно отличатся от равновесной. В узкой полоске выраженного диффузионного удара ($x\cong 0.25$ и меньше) превышение концентрации спало всего наполовину, а на границе обращения она достигла всего десятой части равновесного значения.

Вообще говоря, мы получили неожиданный результат. В самом деле, в модель закладывались лишь двухлетние наблюдения в одном месте, которые только и требовалось объяснить, а на выходе получили и совпадение теории с наблюдениями, и существенные выводы о динамике денежного обращения по всей стране в течение многих лет.

В частности эти наблюдения приводят нас к выбору стратегии активного поиска редких монет. Если интересует вариант последних лет, то его есть смысл искать вблизи линии источников. Если интересна монета, выпущенная более 5 лет назад, то поиски следует проводить вдали от линии источника. У самой границы обращения частые выборки делать не следует – там мало́ перемешивание монет. На то она и граница, что перемещение монет там очень медленно (вспомним, мы сами постулировали, что скорость от точки к точке на самой границе равна нулю). Значение x для конкретного места исследования можно определить самостоятельно, сделав выборки монет последних лет и повторив обработку соответствующим образом. Рассмотрим пример. Нас интересуют редкие варианты 1-копеечных монет до 1980 г. Денежное обращение Москвы начала 1990-х было с избытком заполнено последними годами, так что монеты до 1980 г. встречались примерно 1:30. Чтобы добраться до любой монеты интересующего периода, нужно пересмотреть огромное количество «балласта» - монет последних лет. В то же самое время, например, в Харькове это соотношение было 1:10, а единичная выборка в Пензе дала и того лучший результат [5]. Таким образом, к распаду СССР и после него поиск редких монет 1982-1984 гг. лучше было осуществлять вблизи линии эмиссии, например, в Москве, а вариантов ранних годов – в достаточно крупных городах, находящихся вдали от линии эмиссии. За годы распределение источников новых монет в СССР в целом определилось и не менялось.

Из интересных применений этой модели можно упомянуть и о таком практическом выводе, как решение обратной задачи. По достаточно мощной выборке определить, когда, а порой и где, она была сделана. Как правило, речь идёт о копилках и кладах. Для уверенного решения этой задачи всё же необходимо иметь накопленную эмпирическую базу для различных мест сбора монет различных эмиссий. Поскольку в таком ключе исследователи проблему ранее не решали, то эта задача, скорее всего, – дело будущего. В перспективе предложенный метод является более мощным инструментом исследования в обработке кладов, чем применяемый ныне: в качестве нижней границы сокрытия клада берётся самая младшая дата на монете. С помощью глобальной динамической модели можно надёжно оценивать время сокрытия клада до месяцев, а также выявлять, является ли клад накопительным за длительное время, или практически одномоментным.

Вообще говоря, интересно сделать ещё одну проверку этой модели. На основе наблюдений построить динамику работы источников для 20-копеечных монет 1988, 1990 и 1991 годов, и рассмотреть, насколько они согласованны. Эту работу лучше делать вблизи от источников, когда имеется значительное превышение среднего (диффузионный удар), что позволяет с большой надёжностью даже на малых выборках определить параметры эмиссии. Поскольку все монеты указанных лет имеют чётко различимые признаки по месту производства, то имеет практический интерес рассмотреть динамику новых монет обоих монетных дворов по отдельности.

Расширение модели.

Полученная динамическая модель, хотя и является простой, но не единственной и допускает обобщения и изменения для решения более специфических задач.

Может показаться, что несколько искусственно выглядит представление функционального пространства в виде прямоугольника, куда реалистичнее выглядит круг. Разместим источники в центре круга, и пусть они будут работать как $F(t)$. Тогда у нас будет круговая симметрия, уравнение диффузии с источниками вместо $C(r,\varphi)$, где r – расстояние от центра круга до места наблюдения, а φ – полярный угол от оси начала координат, будет функцией только лишь r. И само уравнение для $C(r)$ станет немного сложнее. Поведение на границах и диффузионный удар будут иметь такой же характер. Ответ станет немного более громоздким, но это и всё. Хотя на следующем этапе, в этом случае можно вводить не центр источников, а буквально в определённых отдельных точках размещать их на то или иное время. Эти точки могут имитировать источники Москвы, Ленинграда, Новосибирска и т.д. Такая детализация действительно заслуживает внимания и благодаря широкой доступности вычислительных средств, может лучше описать картину денежного обращения. В этом случае у нас исчезает круговая симметрия, а решение уравнений будет только численное. В таком контексте можно рассмотреть положение эффективной границы обращения, которая уже явно проявит свою фрактальную природу, любопытно узнать, какие населённые пункты, скажем, Московской области окажутся близкими к этой границе. Но с другой стороны на основе эмпирических данных, тот же самый населённый пункт будет отнесен к границе обращения и в предложенной модели, причём поведение изменения концентраций различных вариантов монет будет практически таким же. Во всяком случае, типичная 10% точность измерений не обещает значительного увеличения детализации. Зато по прежнему сохранится возможность поставить в соответствие населённому пункту значение x прямоугольника нашей модели.

Можно учесть и временный вывод монет из обращения, когда они оседают, например, в копилках или отделениях банка после инкассаций, а затем, через какое-то время возвращаются. Можно ввести и функцию потерь. Все эти случаи легко математически описать, см., например, [1]. И всё же это поправки, второй уровень погружения в детализацию, которые в целом не затрагивают сути.

Здесь использовалась модель классической диффузии, поэтому полученному решению присущи недостатки этой модели. Самым уязвимым является дальнодействие. По этой модели получается, что как только утром 9 марта 1989 года первый новый двухгривенный попал в обращение в Москве, как в тот же день бабушка в чукотском селении дала внуку на конфеты блестящие 20 копеек 1989 г. В самом деле, $C(x\text{=чукотское селение},t\text{=на заходе солнца 9 марта 1989 г.})\neq 0$, и, значит, хотя и маловероятно, но это возможно. Проблему дальнодействия разрешают, введя в уравнение Фика ещё одно слагаемое с параметром скорости диффузии [1]. Это усложнение введёт дополнительную константу, вместо шести будет семь неизвестных, в итоге мы получим зависящее от времени решение. Оно будет иметь несколько более сложный вид. Но при этом оно так же будет давать и диффузионный удар и практически такое же асимптотическое поведение. Обычно из-за быстротечности процесса на практике редко возникает необходимость в решении таких задач, но у нас диффузия длится не недели, как в кадушке солёных грибов, а годы. Так что в этом направлении можно получить интересные результаты. Например, внук только на следующем восходе солнца получил от бабушки сверкающий двугривенный. Отец из Москвы прилетел.

Всё же гораздо большее влияние на результат будет иметь иной вид функции источников. Именно его изменение способно больше проявлять деталей. Например, предложенная глобальная модель не объяснила динамику новых монет первых двух месяцев. Но разрешение этой проблемы здесь же предложено не каким-либо из вышеприведённых эффектов, а в рамках всё той же модели с дополнительным источником, его результаты кратко представлены в Приложении 3. Численное решение подтвердило ожидаемые свойства этого источника. Его введение объяснило появление краткого всплеска в 14 выборках и не сказалось на общей динамике денежного обращения, поскольку характеристическое время составило 9 месяцев, а равновесная концентрация на порядок меньше средней. В итоге, вдали от дополнительного источника динамика сохраняет свойства первого приближения. Для выявления детализации функции источника интересен результат в другом месте, например, почти наверняка, в Ленинграде для 20 копеек 1989 года будут получены иные даты эмиссии. Было бы интересно сравнить и предельную концентрацию. Характеристическое время T настолько велико, что обращение каждого региона за период порядка года можно рассматривать чуть ли не изолированно.

Существенным является учёт перемешивания не диффузионного типа. Продемонстрируем это на примере. Между Москвой и Ленинградом в те времена курсировали десятки поездов, и десятки тысяч людей ежедневно перевозили в кошельках вмороженные образцы московского и ленинградского обращения. Речь идёт о конвективных потоках. За счёт них на Ленинградском вокзале Москвы ежедневный срез распределения монет до сих пор разительно отличается от типичного в городе. А электропоезда и пригородные автобусы по всей стране развозили и развозят образцы инородного денежного обращения. Учёт конвективных процессов – такая же интересная задача, которую можно решать в будущем. Её, по всей видимости, можно ставить локально в применении к конкретной ситуации, аналогичным образом конструируя функцию источников. Во всяком случае, именно полученное большое значение характеристического времени T, позволяет локализовать постановку задачи. Но её решение было бы весьма важно. Например, оценить время, за которое будет обнаружен новый редкий вариант ленинградской монеты на Ленинградском вокзале Москвы, если в среднем в день просматривать n монет, при известной частоте её встречаемости $C_л$ в Ленинграде. На необходимость рассмотреть конвективные потоки указывает и тот факт, что в классической диффузии на границе обращения и через полтора-два года концентрация новых монет мизерна. В самом деле, в рассмотренном случае через 1 год и 9 месяцев после выпуска первых новых монет 1989 г. к 4 декабря 1990 г. граничная концентрация достигает всего $3 \cdot 10^{-8}$. Т.е. 1 монета на 30 миллионов. Этот вывод кажется невероятным. Либо он действительно верен, либо вдали от источников значительную роль играют миграции населения.

Методические замечания.
В этой работе показано, что наибольшие результаты можно получить, когда ведётся максимально полное описание выборки. Например, указание, что монета варианта 2 из начала статьи встречается с частотой 1: 30 от всех монет, может быть далеко от истины. Будем считать, что в начале статьи речь шла о 20 копеечниках. В самом деле, если место наблюдения характеризуется малым значением x (x<0.5), то в окрестности пика диффузионного удара, новые монеты могут значительно превышать среднее значение. На описываемом здесь месте доля 20 копеек 1989 г. к концу 1990 г. составляет 8% от общей массы всех монет, выпущенных до них включительно, а во время удара она может быть 12%. И если у варианта 2 было выявлено значение 1:30 весной 1990 года, уже через полгода после пика оно станет 1: 27. Такое изменение заметно даже для выборок в сотни монет. Другой пример. Пусть в марте 1989 года определено, что некий вариант 2 20 копеек встречается как 1:30. Тогда уже к концу 1990 года вклад новых монет 1989 года составит 8%, а 1990 года – ещё около 10 % [5]. Таким образом, со временем соотношение изменится с 1:30 на 1:35. Итак, встречаемость варианта по отношению ко всей массе монет сильно зависит от времени. Вполне возможно, разумнее описывать встречаемость варианта внутри года. Тогда со временем будет меняться лишь встречаемость монет этого года, а распределение его по вариантам может оставаться неизменным. Например, 20 копеечные монеты 1961 года в полном описании могут выглядеть так: вариант А принят за 1:1, вариант Б 1:16, вариант штемпель лиц. ст. I3 копеек 1958 г., штемпель об. ст. А примерно 1:11000, остальные – реже, чем 1:20000 (обозначения из [4], с.145, статистика из [5].)

Казалось бы, есть смысл для каждого номинала денежной эмиссии принять встречаемость монет определённого года за 1, и тогда введение новых монет рассматривать по отношению к эталонной. В данном случае, если за 1 принять 20 копеечники 1961 года, то устоявшееся значение встречаемости монет 1989 года C_0 составит 1:13. Этот вариант описания тоже не практичен, поскольку в граничных областях (x~0 и x~1), приближение к C_0 происходит годами. В любом случае по отношению к монетам СССР эта рекомендация вполне возможно уже и не уместна, но рассмотренный пример показывает, как в период постоянного выпуска существенно меняется во времени распределение вновь поступающих монет, что приводит к необходимости унифицировать описание встречаемости монет в обращении. Наверное, самым надёжным будет статистическое получение C_0 и динамических характеристик обращения для каждого варианта каждого номинала.

Заключение.

Было показано, что частота встречаемости монет не является универсальной характеристикой. В пределах эмиссии она значительно изменяется со временем, имеет разные значения и по-разному себя ведёт в разных населённых пунктах.

Литература.

[1] J. Crank. The Mathematics of Diffusion. Oxford: Clarendon Press, 1975.
[2] Б.Л. ван дер Варден. Математическая статистика. М.: изд-во иностранной литературы, 1960.

[3] С.Кульбак. Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967.
[4] Д.Андрееев, Е.Гаврюшин. К вопросу коллекционирования советских монет современного обращения. В сборнике Советский коллекционер №27. М.: Радио и связь, 1990, с. 141-149.
[5] А.В. Прокофьев. Рукописи по ведению статистики монет СССР. Не опубликовано.